جلسه دهم ۹۸/۲/۲۰

گر صورت بندی هامیلتونی را دنبال کنیم باید مفهوم چگالی هامیلتونی آشنا شوید

$$H = \int \mathcal{H}\, d\vec{r}$$

$$\mathcal{H}(\psi_i, \Pi_i, \nabla\psi_i)$$
Hamilton density

که می‌تواند تابعی از سه کمیت میدان

گرچه سرعت همان $\dot\psi$ است

هیچ وقت تابع چگالی هامیلتونی شامل $\dot\psi$ نمی‌شود

یعنی مشتق زمانی ψ که اثر خود را نشان می‌دهد در $\mathcal{L}$ $\dot\psi$ به صورت Π_i شود

$$\Pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\psi_i}$$

تعریف تکانه براساس لاگرانژ

اگر ۲۰ و [illegible]

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{p_i}_{\text{تکانه تعمیم‌یافته}} \underbrace{\dot q_i}_{\text{سرعت}} - \mathcal{L}$$

تبدیل لژاندر که $\mathcal{L}$ را به H تبدیل می‌کند

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i} = p_i(q_1, \dots, \dot q_i \dots)$$

تابعی از q_1 و $\dot q_i$ هاست

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{n} \dot\psi_i \Pi_i - \mathcal{L}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (1)\ \dfrac{\delta H}{\delta \Pi_j} = \dot\psi_j \\[2ex] (2)\ \dfrac{\delta H}{\delta \psi_j} = -\dot\Pi_j \end{cases}$$

معادلات هامیلتونی

یک میدان

چیزی که مهم بود کموتاتورشان صفر بود
متغیرهای دینامیکی

$$\left[\hat{\Pi}_j(\vec{r}\,'),\ \hat{\Pi}_k(\vec{r})\right] = \left[\hat{\psi}_j(\vec{r}\,'),\ \hat{\psi}_k(\vec{r})\right] = 0 \qquad \mathrm{I}$$

هر عملگر تکانه مختص الرحال دو ذره با مختصات متفاوت باشند با هم جابجا می‌شود — هر عملگر مختص میدان دو ذره باشد

یعنی می‌توان آن‌ها را هم زمان اندازه گیری کرد

$$\left[\hat{\psi}_j(\vec{r}\,'),\ \hat{\Pi}_k(\vec{r})\right] = -i\hbar\,\delta_{jk}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad \mathrm{II}$$

یادداشت: مزدوج آن‌ها می‌تواند با دقت کامل در یک زمان مشخص انجام گیرد.

I اندازه گیری این دو مختصه تا در مسیر متفاوت میدانی به طور کامل می‌تواند انجام شود و عدم قطعیت نداریم

از طرف دیگر رابطه II اندازه گیری های همزمان، دقیق Ψ_j و Π_j در یک نقطه

از فضا امکان پذیر نیست.

پس در نتیجه ←

$$\hat{H}_{\text{میدان}} = \int \hat{\mathcal{H}}\left(\hat{\Pi}_j,\ \hat{\psi}_j,\ \nabla\psi_j\right) d\vec{r}$$

از این به بعد به دنبال ویژه حالات و ویژه مقادیر هامیلتونی میدانی هستیم

$$\hat{H}_{\text{میدان}}\ |\text{میدان}\rangle = \mathcal{E}_{\text{میدان}}\ |\text{میدان}\rangle$$

حال می‌خواهیم اولین موردی که کوانتیده بشه در کنار الکترودینامیک کلاسیکی هست

$$\boxed{\mathcal{H}=\frac{\Pi_y^2}{2\mathcal{M}}+\frac{1}{2}\tau y'^2}$$

جرم واحد

① معادلات ③ $\dot{y}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Pi_y}=\frac{\Pi_y}{\mathcal{M}}$

اساحت

$\frac{d\dot{y}}{dt}$ ④ $\dot{\Pi}_y=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y}=\tau y''$

$$\ddot{y}=\frac{\dot{\Pi}_y}{\mathcal{M}}\rightarrow\mathcal{M}\ddot{y}=\tau y''$$

$$\tau y''-\mathcal{M}\ddot{y}=0\rightarrow y''-\frac{\mathcal{M}}{\tau}\ddot{y}=0$$

$$v=\frac{\tau}{\mathcal{M}}$$

برای دیدن اثرات میکروسکوپیکی از طریق ماکروسکوپیکی از میدان استفاده می کنیم

کوانتش میدان :

$H=\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}Kx^2$

$\hat{H}=\frac{\hat{P}^2}{2m}+\frac{1}{2}K\hat{x}^2$

در کوانتش مکانیک کوانتومی به جای متغیرهای کلاسیکی از عملگرهای کوانتومی استفاده می کردیم

پس برای کوانتش یک میدان به جای متغیرهای کلاسیکی از عملگرهای هرمیتی جایگزین کنیم

$$\Pi_y\rightarrow\hat{\Pi}_y$$

$$\psi_j\rightarrow\hat{\psi}_j$$

الکترودینامیک کلاسیکی :

چون میدان های الکترومغناطیس دارا سینی هستند ما برای کوانتیده کردن آن ها مشکل است
میدان های تانسی

طبق روابط ماکسول E و B باهم در ارتباطند

پس چون دینامیک های الکترومغناطیسی مؤلفه های E و B وابسته به میدان الکترومغناطیس مستقل نیستند باید قبل از اعمال کوانتش باید آن ها را به مختصات میدانی مستقل تغییر دهیم.

سیستمی از ذرات باردار که در حال حرکت هستند (یا در حضور میدان الکترومغناطیس) را مشاهده فرض می کنیم

ذرات نسبیتی نیستند

$$m \frac{d^2\vec{r_i}}{dt^2} = \vec{F_i} = q\vec{E_i} + \frac{q}{c} \vec{V_i} \times \vec{B_i}$$

معادله حرکت نیوتنی حاکم برای ذرات

تحت میدان الکترومغناطیسی

میدان الکتریکی در محل ذره i ام

میدان مغناطیسی در محل ذره i ام

معادلات ماکسول

$$\begin{cases} (1) \quad \nabla \cdot E = 4\pi\rho \\ (2) \quad \nabla \cdot B = 0 \\ (3) \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}} \\ (4) \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} + \frac{4\pi}{c}\vec{J} \end{cases}$$

چگالی های توزیع بار و جریان

$$\rho = \sum_i q_i\, \delta(\vec r - \vec r_i)$$

$$\vec J = \sum_i q \vec v_i\, \delta(\vec r - \vec r_i)$$

چون این میدان ها لزوماً مستقل نیستند ساختن معادله لاگرانژ براساس آن ها مشکل است

خواهیم دید که در شش مؤلفه E و B با استفاده از معادلات ماکسول به ۴ معادله تقلیل می یابد

با استفاده از معادلات دوم و سوم ماکسول شش مؤلفه E و B را به چهار مؤلفه تقلیل می دهیم

پتانسیل برداری سه مؤلفه و نرده ای هم یکی دارد

$$(2) \rightarrow \nabla \cdot \vec B = 0 \implies \vec B = \nabla \times \vec A$$

مشتق

$$(3) \rightarrow \nabla \times E = -\frac{1}{c} \dot{\vec B} \implies E = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \dot{\vec A}$$

پس از این به بعد کل داستان الکترودینامیک حاصل از حضور ذرات در میدان الکترومغناطیس به یک ساختار ۴ مؤلفه ای شامل سه مؤلفه A و یک مؤلفه نرده ای φ است.

A: پتانسیل برداری
φ: پتانسیل اسکالر

پس لاگرانژی چنین سیستمی برابر می شود با

$$L = \int \mathcal{L}\, d\vec r$$

چون همه مستقل نیستند L را اینجا تفکیک نویسی می کنیم

$$L = \int \left(\underset{\text{part}}{\mathcal{L}_{\text{ذره}}} + \underset{\text{rad}}{\mathcal{L}_{\text{تابش}}} + \underset{\text{int}}{\mathcal{L}_{\text{برهمکنش ها}}} \right) d\vec r$$

$$\boxed{\mathcal{L}_{part} = \sum_i \frac{1}{2} m\, \delta(\vec r - \vec r_i)\, v_i^2}$$

چون انتگرال گرفته ایم (جای ...) حذف می شود

حل معادلات لاگرانژی با استفاده از L به معادله حرکت می‌رسیم

Subject:
Year　Month　Date

$$\boxed{\mathcal{L}_{rad} = \frac{(-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}})^2 - (\nabla\times\vec{A})^2}{8\pi} = \frac{E^2 - B^2}{8\pi}}$$

انرژی پتانسیل میدان E

$$\boxed{\mathcal{L}_{int} = -\rho\varphi + \frac{\vec{J}\cdot\vec{A}}{c}}$$

هر بار یک ذره باردار قرار می‌گیرد

ناشی از انرژی پتانسیل هر ذره با یک ذره باردار دیگر است

این جمله انرژی برای میدان‌های B

ناشی از انرژی هر ذره باردار متحرک

تحت میدان B ذره باردار حرکت می‌کند

ابتدا چگالی تکانه مزدوج برای A محاسبات انجام می‌دهیم که منتهی به بیان چگالی هامیلتونی برای دو لاگرانژی int , rad می‌رسیم

چون در L تابع $\dot\varphi$ وجود ندارد　مشتق

تکانه مزدوج برای A

$$\pi = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}} = \frac{1}{4\pi c}\left(-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\dot{A}\right) = \frac{\vec{E}}{4\pi c} \quad (1)$$

تکانه مزدوج مربوط به φ

$$\pi = 0$$

سپس با استفاده از تبدیل لژاندر می‌نویسیم

$$\mathcal{H} = \sum_i p_j \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

با توجه به ۱ و ۲

$$\rightarrow H = \int\left\{ \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2) + \frac{\vec{E}\cdot\nabla\varphi}{4\pi} \right\} + \int \sum_i \left[\frac{(p_i - \frac{q}{c}\vec{A})^2}{2m} + q\varphi \right] \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)\, d\vec{r}$$

بر اساس (۱)

$$\vec{E} = 4\pi c \pi$$

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

حالا با استفاده از یک تعریف ها و پیمانه‌ها این را منظم + راساده‌سازی می‌کنیم

اگر با استفاده از تعریف یک تابع نرده‌ای به اسم χ

این A ، φ را shift می‌دهیم

$$\begin{cases} \varphi \longrightarrow \varphi - \dfrac{\dot{\chi}}{c} \\ \vec{A} \longrightarrow A + \nabla\chi \end{cases}$$

به عنوان مثال در معادلات ماکسول چک کنیم

مثال

با توجه به اینکه

$$\begin{cases} \nabla \times \chi = 0 \\ \nabla \chi = 0 \end{cases}$$

این به عنوان یک پیمانه لورنتس می‌توانیم داشته باشیم $\Leftarrow$

با توجه به اینکه $\Longrightarrow$ $\nabla\cdot A = \dfrac{\dot{\varphi}}{c}$

تعریف

$\nabla\cdot A = 0$ $\Leftarrow$ پیمانه ~~لورنتس~~ پایشی

پیمانه لورنتس تقارن معادلات ... را حفظ می‌کند چون ... معادلات ... است و در آن ... وارد نمی‌شود

$$E = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}} \rightarrow \nabla\cdot E = -\nabla\cdot\nabla\varphi - \frac{1}{c}\nabla\cdot\dot{\vec{A}}$$

$$\nabla\cdot E = \nabla^2\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot A) = -4\pi\rho$$

با اجرای پیمانه پایشی $\longrightarrow$ $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$ که معادله پواسون

$$\varphi = \int \frac{\rho(\vec{r}')\, d\vec{r}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\varphi = \int \frac{\sum_i q_i\, \delta(\vec{r}'-\vec{r}_i)\, d\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

نکته: φ معادله پواسون را به پتانسیلی می‌رسیم که از معادلات کولنی بدست می‌آید پس به آن پیمانه کولنی پتانسیل

Subject:
Year   Month   Date

نکته: در این پیمانه پتانسیل نرده‌ای φ به وسیله مکان‌های لحظه‌ای ذرات باردار تعیین می‌شود به طوری که در غیاب آن‌ها $\varphi = 0$ می‌شود.

برای هر میدان برداری می‌توانیم آن را به قسمت‌های طولی و چرخشی (عرضی) تقسیم کنیم.

$$\vec{A} = \underbrace{\vec{A}_L}_{\text{طولی}} + \underbrace{A_T}_{\text{عرضی}}$$

$\vec{A}_L$ ← غیرچرخشی: $\nabla \times A_L = 0$

A_T ← چرخشی (سلنوئیدال): $\nabla \cdot A_T = 0$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}_L + \nabla \cdot A_T$$

پس فقط سمت عرضی پتانسیل برداری براساس پیمانه ناشی یا کولنی صحیح است پس به آن پیمانه عرضی هم گفته می‌شود.