جلسه پنجم ۹۸/۲/۱۴

«فصل ۲»

. نظریه میدان های کوانتومی .

موج میدان های کلاسیکی

حالت میدان در نقطه‌ای مکان x و مقدار t $\psi(\vec{x},t)$ یا

این ψ می‌تواند حالات مختلفی از میدان کلاسیکی باشد مثلاً الف) جابجایی وابسته به یک موج صوتی در هوا

تغییر مکان یک نقطه در تار مرتعش

وقتی یک جابجایی خاص را در نظر بگیریم یا تغییر مکان در تمام این مثال‌ها میدان‌ها تک هستند چون طرف حرکات ذرات هستند

نمایش میدانی یک مسأله‌ی چند جسمی را به یک مسأله‌ی ساده تبدیل می‌کند مثلاً در مورد امواج عرضی ایجاد شده در یک تار مرتعش معادله موج

جابجایی تار

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \text{I}$$

سرعت فاز امواج تار در راستای تار

معادله میدانی تار مرتعش بر اساس مکانیک نیوتنی حاصل شده است

چیزی که در اینجا مهم است بررسی این تک معادله میدانی در مورد امواج عرضی یک تار مرتعش از تقریباً 10^{23} معادله مربوط به تک تک مولکول‌های انفرادی تار ساده‌تر است.

وقتی یک تک معادله را بررسی می‌کنیم به جای نوشتن معادله حرکت برای هر ذره و 10^{23} مولکول ذره داریم پس 10^{23} معادله ایجاد می‌شود.

(هر ذره معادله مخصوص به خودش را دارد.)

نظریه میدان، میدان حاکم بر یک ذره را بررسی کند

تعریف یک سیستم چند جسمی میکروسکوپیکی به وسیله‌ی یک میدان کلاسیکی وقتی ویژگی‌ها ماکروسکوپیکی مورد نظر باشند بسیار مفیدتر است.

میدان الکترو مغناطیس راحت است که دانه‌ای اش کنیم

یکی از بحث‌های تئوری میدان دانه‌ای کردن میدان الکترومغناطیس است و این میدان اساساً یک میدان غیر دانه‌ای است و از منظر ریاضی معادل با یک مسأله چند جسمی شامل بی‌نهایت ذره است

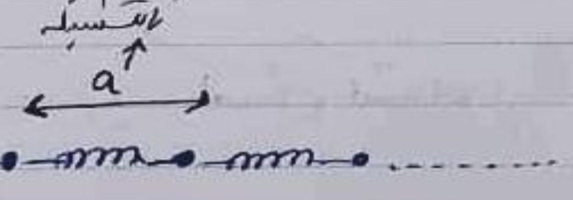
(اساس کار در مکانیک کوانتومی مکانیک لاگرانژی و هامیلتونی بود)

پس باید برای کار مون ابتدا از مکانیک هامیلتونی و لاگرانژی شروع کنیم

معادله امواج عرضی یک تار کشیده که در بالا آمده است یک فرمول بندی نیوتنی از دینامیک محیط‌های پیوسته است اما نظریه کوانتومی میدان‌ها باید براساس فرمول بندی لاگرانژی یا هامیلتونین که بر پایه‌های متغیرهای کانونیکال پایه‌گذاری شده توسعه یابد

پس در ادامه یک ساختار بسته در نظر می‌گیریم و با حد گیری آن را به ساختار پیوسته تبدیل می‌کنیم

برای کار مون نقش زنجیره‌ای از N ذره در نظر می‌گیریم و تصور می‌کنیم بسته است و با حد رفتن فاصله بین شبکه با نصف کردن زنجیره‌ها نصف می‌شود.



ساختار جامدات ←
فرض می‌کنیم یک ساختار خطی است

Subject :
Year . Month . Date .

نظریه کلاسیکی میدان ها:

میدان یک تار مرتعش یک میدان کلاسیک است با استفاده از لاگرانژی [illegible] به معادله موج می‌رسیم

برای ساختاری با N ذره لاگرانژی را می‌نویسیم:

برای تار مرتعش به صورت یک زنجیره‌ای از ذرات با ساختار خطی

k ثابت کشسانی
همه فنرها مشابه

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m \dot{y}_i^2 - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} k (y_{i+1} - y_i)^2$$

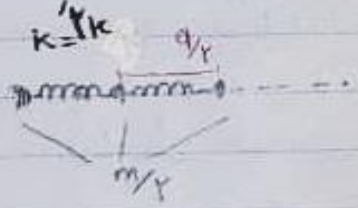
y_i ← جابجایی عرضی

m_i جرم تمامی ذرات

a ← ثابت شبکه (فاصله دو جرم متوالی موقعی که در حالت تعادل است)

طول ذره Na

برای اینکه از این ساختار گسسته یک ساختار پیوسته را بسازیم (اگر بار جرم ها را نصف و [illegible] داریم)



در اینجا فرض می‌کنیم ابتدای تار ثابت است و تار از سمت راست گسترش یافته

$$\lim_{a \to 0} \sum a \rightarrow \int dx$$

$$\lim_{a \to 0} \frac{m}{a} \longrightarrow \frac{dm}{dx} = \mu$$ چگالی جرمی خطی

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ k \to \infty}} ka \rightarrow \tau$$ کشش کشسانی

از a فاکتور گرفتیم

$$\Rightarrow L = \lim_{a\to 0} \sum_i a\left(\frac{1}{2}\underbrace{\frac{m}{a}}_{\mu} \dot{y}_i^2 - \underbrace{ka}_{\tau}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{a}\right)\right\}$$

معادله لاگرانژی برای تار مرتعش

$$* \quad L = \int dx \left\{ \frac{1}{2}\mu \dot{y}^2 - \frac{1}{2}\tau y'^2 \right\}$$

a و خود متغیر $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{a}\right) = y'$

که $\dot{y}$ همان $\frac{dy}{dt}$ است

y' همان $\frac{dy}{dx}$ است.

با تعریف چگالی لاگرانژی بر واحد طول را به صورت $\mathcal{L}$:

$$L = \int \mathcal{L}(\dot{y}, y')\, dx$$

$$L = T - V$$

$$\mathcal{L} = \tau - \nu$$

چگالی انرژی جنبشی $\tau = \frac{1}{2}\mu \dot{y}^2$

چگالی انرژی پتانسیل $\nu = \frac{1}{2}\tau y'^2$

چگالی لاگرانژی تابعی از سرعت کمیت میدان $(\dot{y}_{(x,t)})$ و مختصه میدان $y(x,t)$ و احتمالاً مشتق آن $y'(x,t)$ است

$$\mathcal{L}(\dot{y}, y, y')$$

x نمایش دهنده‌ی نقطه‌ای است که در آن میدان در نظر گرفته شده است. یا اصطلاحاً محل مشاهده و جزء مختصه میدان نیست (جزئی از نقاطی که ما فرض کردیم آن جا میدان حساب کنیم) میدان

برای ارائه میدان برای ساختارهای مختلف را با معادله لاگرانژ

هدف کردن راه ... - ساختار ... ساختار پیوسته

Subject:
Year: Month: Date:

حال باید تلاش کنیم معادله I از حالتی لاگرانژی گفته شده به دست آوریم.

برای کلیت دادن به بحث خود از ساختار سه بعدی در نظر می‌گیریم و از این رو به جای $y_{(x,t)}$

در سه بعد با $\psi(\vec{r},t)$ نشان می‌دهیم

$$\psi(\vec{r},t) \xleftarrow{\text{در فضای سه بعد}} y(x,t)$$

$$\rightarrow L = \int \mathcal{L}(\dot{\psi}, \psi, \underbrace{\nabla\psi}_{\text{در سه بعد}})\, d^3\vec{r}$$

$$\Rightarrow \int \mathcal{L}\left(\dot{\psi}, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) d^3 r$$

مشتق وردشی یا تابعی L نسبت به ψ با متغیر میدان

$$\frac{\delta L}{\delta \psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)} \qquad x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$$

مشتق

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial x_i}\right)}$$

$x = vt \rightarrow \frac{m\,dv}{dt} = a$

با توجه به عبارات لاگرانژی نسبت به زمان مشتق می‌گیریم

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial x_i}\right)} \right\}$$

**

معادله لاگرانژ

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}} - \frac{\delta L}{\delta \psi} = 0$$

معادله حرکت برای میدان

مشتق

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}} = \frac{\delta L}{\delta \psi}$$

حال می‌خواهیم این معادلات لاگرانژی برای نظریه میدانی را اگر به جای لاگرانژی بازنویسی کنیم

رابطه * در نظر بگیریم در نظریه کلاسیکی میدان ← تمرین

$$\frac{\delta L}{\delta y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = \tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}'} \right\} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

حال این را در معادله ** می‌گذاریم

$$\rightarrow \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

با مقایسه با رابطه‌ی I و تعریف کل رابطه‌ی τ و [illegible] معرف و $\frac{\mu}{\tau} = \frac{1}{v^2}$ ← تمرین

به معادله I می‌رسیم ←

$$\tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$