جلسه ششم

۱

فصل سوم: مکانیک کوانتومی نسبیتی

در این بحث دقیق نظریه کوانتوم نسبیتی از فرمولبندی هموردای استفاده می‌شود که در آن تمام قوانین در فضای چهار بعدی که بعد چهارم آن زمان است بیان می‌شوند.
مزیت‌های چنین صورتبندی عبارتند از:
اول اینکه متغیرهای زمانی و فضایی به طور متقارن در نظر گرفته می‌شوند.
دوم اینکه چنین صورتبندی‌ای اطمینان می‌دهد که قوانین بدست آمده تحت تبدیلات لورنتس تغییرناپذیرند.

یادآوری: تبدیلات لورنتس بین مشاهده‌پذیرها از دید دو ناظر که نسبت به یکدیگر با سرعت ثابت حرکت می‌کنند ارتباطی ایجاد می‌کنند.

آشکار است که معادله شرودینگر به عنوان معادله کوانتوم نسبیتی قابل قبول نیست چرا که از نظر فضایی مشتق‌ها از مرتبه دوم (∇^2) ولی از نظر زمانی فقط مشتق مرتبه اول را دارد.

دو انتخاب برای پیدا کردن معادله برای کوانتوم نسبیتی داریم
۱- معادله‌ای ایجاد کنیم که نسبت به زمان از مرتبه دوم باشد (معادله کلاین-گوردون)
۲- معادله‌ای ایجاد کنیم که نسبت به مکان از مرتبه اول باشد (معادله دیراک)

در هر دو انتخاب باید سه شرط زیر برقرار باشد:
الف: با همتای کلاسیکی خود سازگار باشد
ب: نسبت به متغیرهای زمانی و فضایی تقارن داشته باشد.
پ: در حد غیرنسبیتی (~~[illegible]~~) به معادله شرودینگر تقلیل یابد.

مباحث مربوط به معادله کلاین-گوردن

برای یک ذره در میدان الکترومغناطیسی رابطه کلاسیکی زیر برقرار است

$$c^2\left(P-\frac{q}{c}A\right)^2+m^2c^4=(E-q\Phi)^2 \tag{1}$$

برای رسیدن به معادله کلاین-گوردن و دیگر از طرز دینامیک کلاسیک به کوانتومی متغیرهای کلاسیکی را با مشاهده‌پذیرهای دینامیکی کوانتومی جایگذاری می‌کنیم

$$P\to\hat{P}=\frac{\hbar}{i}\nabla \quad , \quad E\to\hat{E}=i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{2}$$

با جایگذاری روابط (2) در (1) داریم

$$\left\{c^2\left(\frac{\hbar}{i}\nabla-\frac{q}{c}A\right)^2+m^2c^4\right\}\psi=\left\{\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\Phi\right)^2\right\}\psi \tag{3}$$

رابطه بالا که صورتی از معادله کلاین-گوردن است با شرایط بالا سازگار است پس حداقل یک معادله نسبیتی پیدا کردیم. برای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی ایستا داریم

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{\partial \Phi}{\partial t}=0 \tag{4}$$

و معادله کلاین-گوردن (3) برای چنین میدان‌هایی می‌شود

$$\left\{c^2\left(\frac{\hbar}{i}\nabla-\frac{q}{c}A\right)^2+m^2c^4\right\}\psi=\left\{-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}-2i\hbar q\Phi\frac{\partial}{\partial t}+q^2\Phi^2\right\}\psi \tag{5}$$

از نقطه نظر نسبیتی انرژی کل یک الکترون (E) شامل جرم سکون mc^2 است که باید در تابع موج مکانیک کوانتومی نسبیتی وجود داشته باشد پس جواب‌های معادله کلاین-گوردن به صورت $\boxed{\psi=e^{-\frac{imc^2}{\hbar}}\psi_{kin}}$ (6) خواهند بود.

۲. قسمت ψ_{kin} (جنبشی) جمله‌ای است که باید با حالت غیرنسبیتی (یعنی معادله شرودینگر) مقایسه شود.

با قرار دادن (۴) در معادله کلاین-گوردن (۵) آنگاه معادله کلاین-گوردن برای قسمت جنبشی بصورت زیر بدست می‌آید (مشتق را انجام دهید)

$$\left\{c^2\left(\hat{P}-\frac{q}{c}A\right)^2+m^2c^4\right\}\psi_{kin}=\left\{\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2i\hbar(mc^2-q\phi)\frac{\partial}{\partial t}\right)-\left[q\phi(2mc^2-q\phi)+m^2c^4\right]\right\}\psi_{kin} \quad (۷)$$

بعد از ساده سازی داریم (مشتق را انجام دهید)

$$\left\{c^2\left(\hat{P}-\frac{q}{c}A\right)^2\right\}\psi_{kin}=\left\{-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2i\hbar(mc^2-q\phi)\frac{\partial}{\partial t}-q\phi(2mc^2-q\phi)\right\}\psi_{kin} \quad (۸)$$

برای $v \ll c$ (اگر ذره غیرنسبیتی باشد) انرژی جنبشی غالب است و جملاتی که در طرف راست رابطه (۸) شکل mc^2 نیستند می‌توانند حذف شوند و با مقداری محاسبه به معادله شرودینگر خواهیم رسید (مشتق انجام شود)

$$(۹) \quad \left\{\frac{\left(P-\frac{q}{c}A\right)^2}{2m}+q\phi\right\}\psi_{kin}=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_{kin}$$

پس دیدیم که معادله کلاین گوردن برای قسمت جنبشی (۷) به معادله شرودینگر (در حد غیرنسبیتی) منجر شد.

از آنجا که ویژگیهای اسپینی در معادله K.G (کلاین گوردن) حضور ندارد، این معادله حاکم بر رفتار بوزونهای بدون اسپین و به عنوان مثال بوزونهای π خواهد بود. از این به بعد می‌توان فرض کرد که ویژه حالت‌های مانای یک ذره K-G با زمان به صورت $\psi = e^{-\frac{iE_i t}{\hbar}}\varphi_i(\vec{r})$ (۵) تحول یابد. با جایگذاری رابطه (۱۰) در معادله K-G (۳) معادله ویژه مقداری انرژی K-G می‌شود (مشتق انجام شود)

$$\left\{c^2\left(P-\frac{q}{c}A\right)^2+m^2c^4\right\}\varphi_i(\vec{r})=(E_i-q\phi)^2\varphi_i(\vec{r})$$

Subject:
Year. Month. Date. / /

احتمالا فرض کنیم معادله کلاین ـ گوردن برای یک e هیدروژنی نوشته شود

(وقتی زمان در معادله K-G حذف شود می‌شود معادله ویژه مقداری معادله K-G)

تحت های شعاعی ویژه توابع هامیلتونی بودند در معادله شرودینگر

حالا همین رابطه را برای e مجاز آزاد کنیم

$$\begin{cases} q = -e \\ A = 0 \\ \varphi = e/r \end{cases}$$

پتانسیل حاکم پتانسیل مرکزی است پس برای e علامت منفی می‌گذاریم

در مختصات کروی

اگر در معادله K-G رابطه $\psi_l = R_{nl}(r)\, Y_{lm}(\theta,\varphi)$ قرار دهیم معادله را به دو بخش شعاعی و زاویه‌ای تقسیم می‌کنیم

اگر به دنبال ویژه مقادیر انرژی بگردیم باید تحت شعاعی را حل کنیم

حل که کنیم به این صورت می‌شود

$$\mathcal{E}_{nl} = mc^2 \left[1 + \frac{(e^2/\hbar c)^2}{\left\{ n - (l+1/2) + \left[(l+1/2)^2 - (e^2/\hbar c)^2 \right]^{1/2} \right\}^2} \right]^{-1/2}$$

$$\begin{cases} n = 1, 2, \dots \\ l = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

ثابت ساختار ریز $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$

برای بررسی رابطه‌ی بالا در حد غیر نسبیتی $v \lll c$ یعنی $\alpha \lll 1$

ویژه مقادیر

$$\mathcal{E}_{nl} \simeq mc^2 \left\{ 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left(\frac{n}{l+1/2} - \frac{3}{4} \right) \right\} + \alpha^6$$

جملاتی از مرتبه

از این جملات توان ۶ به بالا صرف نظر می‌کنیم

جمله اول رابطه بالا جمله اول آن دقیقاً انرژی سکون است

جمله دوم $\frac{\alpha^2 mc^2}{2n^2} = \frac{-\frac{e^4}{\hbar^2 c^2} mc^2}{2n^2}$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\frac{me^4}{2\hbar^2}}{n^2}\right) = \frac{-13.6}{n^2} = \varepsilon_n$$

(انرژی ترازها) (رابطه ترازهای بوهر است رابطه انرژی الکترونی است)

اگر شرایط نسبیتی را برداریم به جای آن تراز سوم تعمیم می‌بود

جمله سوم الکترون در میدان الکترومغناطیسی که منجر به همان ε ساختار ریز می‌شود.

جمله سوم مربوط به ساختار ریز

$$\varepsilon = \varepsilon_n \frac{\alpha^2}{n}\left[\frac{1}{(l+\frac{1}{2})} - \frac{3}{4n}\right]$$

که تمام اثرات اسپین را در نظر گرفته می‌شود

(این رابطه توان معرف ساختار ریز برای ذره ای بدون اسپین است (مثل یک اتم مزونی (یک اتم هیدروژن که به جای e آن یک مزون π نشسته است)

در لیسانس معادلات ساختار ریز را براساس j نوشته بودیم

$$\Rightarrow \varepsilon_{nj} = \varepsilon_n + \alpha^2 \varepsilon_n \left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n}\right)\right]$$

$j = l \pm 1/2$

برای بررسی اثرات اسپین مدار (اثرات ساختار ریز است)

این همان جمله ستاره است فقط هر جا $l \to j$

سوم

این در معادله در صورتی می‌نشستند که l به جای عدد صحیح عدد نیمه صحیح j باشد

اندازه حرکت صحیح $\to l$

« نیمه صحیح $\to j$ — از حل معادله K.G برای e رسیدیم به معادله ترم اول

این یعنی معادله کلاین - گوردن اثرات اسپین را بررسی می‌کند

معادله دیراک :

حالا بخش بعدی را که مربوط به تعمیم دادن معادله شرودینگر است را بررسی می کنیم یعنی معادله نسبیتی دیراک :

این جا مکان ها براساس مشتق یک است که نیاز به یک معادله خطی داشت که به صورت زیر است

$$\hat{\alpha}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \quad i \rightarrow x, y, z$$

وقتی قرار است معادله نسبیتی دیراک ماتریس های ۴×۴ است پس ψ هم باید چهار سطری باشد

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^{(1)} \\ \psi^{(2)} \\ \psi^{(3)} \\ \psi^{(4)} \end{pmatrix} \qquad \hat{H}\psi = \hat{E}\psi$$

$$\hat{H} = c\hat{\alpha}\cdot\hat{p} + \hat{\beta}mc^2$$

$$\psi = e^{-i\varepsilon_i t/\hbar}\,\psi_i(\vec{r})$$

این را که در معادله کوانتوم نسبیتی دیراک قرار بدهیم و معادله ویژه مقداری انرژی معادله دیراک را پیدا می کنیم

به دنبال ویژه توابع و ویژه مقادیر معادله کوانتوم نسبیتی دیراک هستیم

معادله ویژه مقداری

$$\left\{c\hat{\alpha}\cdot\left(\hat{p} - \frac{q}{c}A\right) + q\varphi + \hat{\beta}mc^2\right\}\psi_i(\vec{r}) = \varepsilon_i\,\psi_i(\vec{r})$$

اولین مثال ذره آزاد دیراکی است می خواهیم برای ذرات با پتانسیل های مختلف آن را بررسی کنیم

ذره که پتانسیل برداری بر آن حاکم نباشد $A=0$

و $\varphi=0$

ذره آزاد ویژه توابعش، ویژه توابع اندازه حرکت خطی هم هستند

$$\left\{c\frac{\hbar}{i}\alpha\cdot\nabla + \hat{\beta}mc^2\right\}\psi_p = \varepsilon_p\,\psi_p$$

Subject:
Year. Month. Date.

با این داستان می توان

$$\psi_p = |u_p\rangle e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}$$

داشت $|u_p\rangle$

$$|u_p\rangle = \begin{pmatrix} u_p^{(1)} \\ u_p^{(2)} \\ u_p^{(3)} \\ u_p^{(4)} \end{pmatrix}$$

این (ψ_p) را در معادله ویژه مقداری دیراک قرار می دهیم به معادله ویژه مقدار ذره آزاد در دینامیک کوانتوم نسبیتی می رسیم.

$$\{c\hat{p}\cdot\hat{\alpha} + \hat{\beta}mc^2\}|u_p\rangle = \varepsilon_p|u_p\rangle$$

تمرین: ویژه مقادیر ε_p را بدست بیاورید

home work?

$$\begin{cases} \varepsilon_p^+ = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} \\ \varepsilon_p^- = -\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} \end{cases}$$

جواب های منفی درست وجود دارد

جواب های انرژی منفی هم قابل قبول هستند

برای ε_p^+ ویژه توابع را بدست می آوریم: $|u_p\rangle$

یا ویژه اسپینور

ضریب بهنجارش

$$\Rightarrow |u_{p\uparrow}^+\rangle = N_p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{\varepsilon_p^+ + mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{\varepsilon_p^+ + mc^2} \end{pmatrix}$$

$$|u_{p\downarrow}^+\rangle = N_p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{\varepsilon_p^+ + mc^2} \\ \frac{-cp_z}{\varepsilon_p^+ + mc^2} \end{pmatrix}$$

برای $(\varepsilon_{\bar{p}})$:

$$|U_{\bar{p}\uparrow}\rangle = N_p \begin{pmatrix} \dfrac{-cp_z}{-\varepsilon_{\bar{p}} + mc^2} \\ \dfrac{-c(p_x + ip_y)}{-\varepsilon_{\bar{p}} + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ضریب بهنجارش

$$|U_{\bar{p}\downarrow}\rangle = N_p \begin{pmatrix} \dfrac{-c(p_x - ip_y)}{-\varepsilon_{\bar{p}} + mc^2} \\ \dfrac{cp_z}{-\varepsilon_{\bar{p}} + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$N_p = \sqrt{\frac{\varepsilon_p^+ + mc^2}{2\varepsilon_p^+}}$$

حالا حالت کلی ψ_p را با p مشخص و انرژی مشخص باشد چون جهت p مهم است.

پس برای نوشتن حالت کلی یعنی ψ_p باید اسپین بالا یا پایین آن و نوع انرژی مثبت یا منفی آن مشخص شود. به عنوان مثال برای یک ذره در راستای محور z با انرژی منفی و اسپین بالا حرکت می کند ویژه مقدار های ε_p و ψ_p چگونه می شود؟

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_p = \varepsilon_p^- = -\sqrt{p_z^2 c^2 + m^2 c^4}$$

$$\psi_{p\uparrow}^- = |U_{\bar{p}\uparrow}\rangle \, e^{\frac{i p_z z}{\hbar}}$$

$$\psi_{p\uparrow}^{-} = \underbrace{N_p}_{\text{ثابت}} \begin{pmatrix} \frac{cp_z}{-E_p^- + mc^2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\frac{ip_z z}{\hbar}}$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{E_p^+ + mc^2}{2E_p^+}}}$$

به دلیل اینکه z است

این را برای انرژی های مثبت می‌نویسیم

$E_p^+ \uparrow$ در راستای z

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E_p^+ + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{c(p_x + ip_y)}{E_p^+ + mc^2} = 0$$