جلسه پنجم ۱۱/ ۱۲/ ۹۷

$|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \ldots$

ρ = ماتریس چگالی برای بستری از آنسامبل های متعلق تشکیل شده

$$\rho = \sum p_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$$

در این حالت نیازی نیست در دنبال ویژه حالات $\hat{G}$ باشیم

$$[\hat{G}] = tr\,\hat{\rho}\,\hat{G}$$

ویژگی های عمومی ماتریس های چگالی دنیا

$$\begin{cases} \rho = \rho^{+} \\ tr\,\hat{\rho} = 1 \end{cases}$$

به ازای هر پایه ای این مقدار ثابت است چه در پایه های خودش چه در پایه های دیگر

فرض کنیم عملگر چگالی برای حالت خالص باشد

$$\hat{\rho} = |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$$

می توانیم به هر عملگر یک حالت نسبت دهیم بنابراین از این به بعد $|\rho_1\rangle$ ویژه حالت عملگر ρ است

$$\hat{\rho}|\rho_1\rangle = \rho_1|\rho_1\rangle$$

$$\hat{\rho}^2|\rho_1\rangle = \rho_1^2|\rho_1\rangle$$

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}\hat{\rho} = |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| = |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| = \hat{\rho}$$

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$$

برای حالت خالص ویژه مقدار عملگر چگالی برای ویژه کت ρ_1 یا صفر است یا یک

در عملگر چگالی اگر در پایه های خودش بنویسیم انتظار داریم

$$\Rightarrow \hat{\rho}^2|\rho_1\rangle - \hat{\rho}|\rho_1\rangle = (\rho_1^2 - \rho_1)|\rho_1\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\rho_1^2 - \rho_1 = 0 \Rightarrow \rho_1 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

که در مورد حالت خالص در مورد عناصر روی قطر به جز یکی که یک است بقیه صفر هستند

ماتریس چگالی حالت خالص تنها در پایه های خودش قطری است

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$ معادله حرکت

11

Subject:
Year: Month: Date:

$$\rho = \sum P_i |\alpha_i, t=0\rangle\langle\alpha_i, t=0|$$

در این حالت P_i از ها یا توزیع تغییر نمی کند ولی خود سیستم ρ تغییر می کند

$$\rho_{(t)} = \sum P_i |\alpha_i, t\rangle\langle\alpha_i, t|$$

$$\rho(t) = \sum P_i \left[\left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha_i, t\rangle \right\} \langle\alpha_i, t| + |\alpha_i, t\rangle \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle\alpha_i, t| \right\} \right]$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha_i, t\rangle = \hat{H} |\alpha_i, t\rangle$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle\alpha_i, t| = \langle\alpha_i, t| \hat{H}$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = \sum P_i \left[\hat{H} |\alpha_i, t\rangle\langle\alpha_i, t| - |\alpha_i, t\rangle\langle\alpha_i, t| H \right]$$

که عملگر است دارای H ریز می شود

$$i\hbar \frac{\partial \rho_t}{\partial t} = \hat{H}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H} = [\hat{A}, \hat{\rho}]$$ در مکانیک آماری معادله لیوویل (استون)

کلاسیک ⟶ کوانتومی

برعکس ندارد

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho]$$ قضیه استورن - لیوویل

انتقال براکت های دنیای کلاسیکی به $\frac{1}{i\hbar}$ براکت های کوانتومی

$$\underset{\text{کلاسیکی}}{\{A, B\}} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [A, B]$$ کروشه پواسون

کروشه های پواسون ← براکت ها

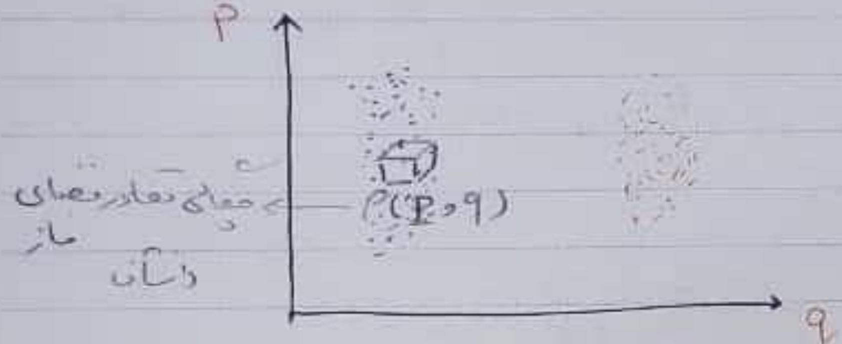
$$\partial \rho / \partial t = \{H, t\}$$

مکانیک آماری کلاسیکی یعنی سیستم هایی که در آن ها تعداد ذرات بسیار زیاد است) زیرا دیگر نمی‌توانیم

پیوسته بررسی دقیق کنیم و باید به صورت آماری بررسی شان نماییم اما در مکانیک آماری کلاسیکی با سیستم های

پیچیده کلاسیکی سروکار داریم ولی چون کلاسیکی است پس مکان q و تکانه p را می‌توانیم هم

زمان داشته باشیم.



برای اینکه نشان دهیم اطراف هر نقطه چه تعداد ذرات است آن سیستم ها را می‌خواهیم دربیاوریم

$\rho(q,p) = \rho$ که نشان دهنده‌ی این است که چه تعداد نقطه اطراف ذره من وجود دارد

برای سیستم n ذره‌ای $3n$ مختصه مکان و $3n$ تکانه مومنتوم (p) داشتیم

ρ چگالی نقاط در فضای فاز است، که هنگام تحول سیستم تعداد نقاط اطراف سیستم هم

متحول می‌شود (مشابه کوانتومی که توزیع تابع حالت متحول می‌شود)

قضیه لیوویل در مکانیک آماری کلاسیکی چه می‌گفت؟

قضیه استفاده لیوویل تکلیف تغییرات زمانی چگالی نقاط در فضای فاز را معین می‌کرد و چون

در مراحل قبلی این درس ارتباط کروشه های پواسون را با دنیای کوانتومی دیدیم پس

دلیل نا سازگاری ρ در دنیای مکانیک کوانتومی را که به آن ماتریس چگالی گفته ایم بیشتر درک

می‌کنیم (این حالات نقش ذرات در کلاسیک را ایفا می‌کنند)

در پایه‌های خودش

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

عناصر
شکل ماتریسی عملگر $\hat{\rho}$ چگونه بدست می‌آید؟

تصاویرش روی پایه‌های فضای هیلبرت مربوطه

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \langle a_1|\alpha\rangle \\ \langle a_2|\alpha\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \langle\alpha| = \left(\langle a_1|\alpha\rangle^* \quad \langle a_2|\alpha\rangle^* \cdots \right)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\rho} = \begin{pmatrix} \langle a_1|\alpha\rangle \\ \langle a_2|\alpha\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} \otimes \left(\langle a_1|\alpha\rangle^* \quad \langle a_2|\alpha\rangle^* \cdots \right)$$

اگر در پایه‌های خودش بنویسیم در نتیجه $|\alpha\rangle$ یکی از آن‌ها می‌باشد یعنی صفر هر مورد برابر هم یکی الا غیر یعنی صفر

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \langle a_1|\alpha\rangle\langle a_1|\alpha\rangle^* & 0 & 0 & 0 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

* پس برای عناصر ماتریسی عملگر ρ خالص در پایه‌ها داریم قطر به جز یکی بقیه همه صفرند

* اما برای آنسامبل‌های ناخالص یا آمیخته ماتریس چگالی در پایه‌های عملگر چگالی عناصر روی قطر را کوچکتر یا مساوی یک هستند

عناصر ماتریسی عملگرهای چگالی در پایه‌های خودشان که باید کوچکتر از یک باشند آیا منفی هم می‌تواند باشد

نمی‌تواند منفی باشد چون $Tr\rho = 1$ و در اینجا

Home work

روی قطر اصلی از جنس احتمال است و احتمال هرگز نمی‌تواند منفی باشد

مثال: سیستمی در وضعیت است که فقط از حالت های $|\chi_+\rangle$ درست شده است (آنسامبل خالص) ماتریس چگالی آن را بنویسید

$$|\chi_+\rangle = \begin{pmatrix} \langle \chi_+ | \chi_+ \rangle \\ \langle \chi_+ | \chi_- \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\rho} = |\chi_+\rangle\langle\chi_+| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (1 \quad 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

مثال: برای سیستمی که در وضعیت یک آنسامبل خالص با حالت $|\chi_{+x}\rangle$ می باشد ماتریس چگالی را بیابید

$$\rho = |\chi_{+x}\rangle\langle\chi_{+x}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad 1)$$

$$\hat{\rho}_{|\chi_{+x}\rangle} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال: برای سیستمی که در وضعیت یک آنسامبل خالص با حالت $|\chi_{-x}\rangle$ می باشد ماتریس چگالی را بیابید

$$\hat{\rho} = |\chi_{-x}\rangle\langle\chi_{-x}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad -1)$$

$$\rho_{|\chi_{-x}\rangle} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad tr\rho = 1$$

عناصر روی قطر نباید منفی باشند

Hom work? همین کار را برای $|\chi_{+y}\rangle$ و $|\chi_{-y}\rangle$ بیابید

$$|\chi_{+y}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ یا } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\chi_{-y}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

** میانگین آنسامبل در هر راستای دلخواهی در جهت کاتوره‌ای باشد صفر می‌شود چون هر مجموعه آنسامبل خالص در یک راستایی شود

Subject: Year Month Date 15

سوال: یک آنسامبل کاملاً کاتوره‌ای در نظر بگیرید

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{[\hat{S}_z]}{\hbar} + \frac{1}{2} & \frac{1}{\hbar}\{[\hat{S}_x] - i[S_y]\} \\ \frac{1}{\hbar}\{[S_x] + i[S_y]\} & -\left(\frac{1}{\hbar}[S_z] + \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

الف - چه توضیع های مختلفی می‌توانیم برای چنین آنسامبل کاتوره‌ای ارائه دهیم؟

یک توضیح این صورت است که $\alpha_1 = |\chi_{+x}\rangle$ باشد با احتمال $\{P_i\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\alpha_1\rangle = |\chi_{+x}\rangle & P_1 = 1/2 \quad \text{با احتمال} \\ |\alpha_2\rangle = |\chi_{-x}\rangle & P_2 = 1/2 \quad \text{با احتمال} \end{cases}$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}|\chi_{+x}\rangle\langle\chi_{+x}| + \frac{1}{2}|\chi_{-x}\rangle\langle\chi_{-x}| =$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$|\alpha_1\rangle = |\chi_{+}\rangle$ $\quad P_1 = 1/2$ با احتمال

$|\alpha_2\rangle = |\chi_{-}\rangle$ $\quad P_2 = 1/2$ با احتمال

$$P = \frac{1}{2}|\chi_+\rangle\langle\chi_+| + \frac{1}{2}|\chi_-\rangle\langle\chi_-| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

درسیستم مایر نمیشود حالات عوض می شوند ماتریس چگالی لذا حتی ترودایلر ثابت است

-۱۴-

پس برای چنین سیستم کاتوره ای به روش های مختلفی توان آنسامبل های مختلف با توزیع های ما P_i داشت که به یک آنسامبل یکسان می رسند

$|\alpha_1\rangle = |\chi_{+y}\rangle$ با احتمال $\frac{1}{2}$

$|\alpha_2\rangle = |\chi_{-y}\rangle$ با احتمال $\frac{1}{2}$

همه حالات را هم درنظر بگیریم فرمول اصلی ماتریس در این حالت به صورت $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ می

$$\rho = \frac{1}{2}|\chi_{+y}\rangle\langle\chi_{+y}| + \frac{1}{2}|\chi_{-y}\rangle\langle\chi_{-y}|$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \ \ -i)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \ \ +i)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & +1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

دقت کنید سیستم آنسامبل های مختلف می توان نتیجه را عوض کرد

نکته:

سؤالاتی که باید پاسخ داده شوند:

تحول زمانی برای سیستم های که با ماتریس چگالیشان شناخته می شود چگونه است (چه حالتی پیش آید)

و این عث چه ارتباطی با شکاف آماری کلاسیکی دارد؟

نکته: همیشه در ذهن این نکته را باید داشته باشیم که اگر سیستم در لحظه $t=0$ با توزیع $\{P_i\}$ شروع به متحول شدن کرده باشد در طی زمان تحول توزیع ها عوض نمی شوند ولی حالات متحول می شوند و چون حالات متحول می شوند سیستم هم متحول می شود.

$\hat{\rho} = P_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ ← درهم با پایه‌ها است

$\hat{\rho} \cdot |\rho_i\rangle = \rho_i |\rho_i\rangle$

$\Rightarrow$ ماتریس چگالی در پایه‌های خودش

$$\hat{\rho} = \sum_{k=1}^{n} \rho_{kk} |\rho_k\rangle\langle\rho_k|$$

ویژه مقادیر عملگر ρ هستند

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \rho_{22} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \rho_{33} & \cdots \\ & & & \rho_{kk} \end{pmatrix}$$

نمایش عملگر ماتریس در پایه‌های خودش

* در مورد آنسامبل خالص یکی از ρ_{kk}ها را داریم که یک و باقی صفر هستند

$$\Rightarrow \sum \rho_{kk} = 1$$

چون ویژه مقدار عملگر ρ هستند و احتمال باید از جنس احتمال هستند $\Rightarrow$ ρ_{kk} = مثبت هستند یا صفر

که در مورد آنسامبل خالص یکی یک و باقی صفر است در مورد آنسامبل مختلط بزرگتر از صفر و کوچکتر از یک هستند $0 < \rho_{kk} < 1$

ویژه مقادیر عملگر چگالی همیشه مثبت هستند.

آنتروپی
$$\sigma = -tr\rho \ln\rho$$