جلسه سوم ۹۷/۱۲/۴

$$D_{m'_j m_j}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-i(m'_j\alpha + m_j\gamma)} \underbrace{d^{(j)}_{m'_j m_j}(\beta)}_{\langle j, m'_j | e^{-i/\hbar \beta \hat{J}_y} | j, m_j \rangle}$$

مثال:

$$d^{j=1/2}_{m'_j m_j}(\beta) = d^{j=1/2}$$

$$j = 1/2 \quad \hat{J}_y = S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

بسط تیلور $e^{-i\beta \hat{J}_y/\hbar} = \hat{1} - i\beta \hat{J}_y/\hbar + \frac{1}{2!}(-i\beta)^2\left(\frac{\hat{J}_y}{\hbar}\right)^2 + \frac{1}{3!}(-i\beta)^3\left(\frac{\hat{J}_y}{\hbar}\right)^3 \ldots$

$$\left(\frac{\hat{J}_y}{\hbar}\right)^2 = \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)\left(\frac{J_y}{\hbar}\right) =$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \end{cases}$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} = 1/4\,\hat{1}$$

$$\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^3 = \left(\frac{\hat{J}_y}{\hbar}\right)^2\left(\frac{\hat{J}_y}{\hbar}\right) = 1/4\,\hat{1}\cdot 1/2\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 1/8\,\hat{\sigma}_y$$

$$\Rightarrow e^{-i\beta \hat{J}_y/\hbar} = \hat{1} - (i\beta/2)\sigma_y + \frac{1}{2!}(-i\beta/2)^2 \cancel{\sigma_y^2}^{\hat{1}} + \frac{1}{3!}\left(-\frac{i\beta}{2}\right)^3 \cancel{\sigma_y^3}^{\sigma_y}$$

$J_y = \hbar/2\, \sigma_y$

$$+ \frac{1}{4!}(-i\beta/2)^4 \cancel{\sigma_y^4}\,\hat{1}$$

$$= \hat{1}\cos\beta/2 - i\sigma_y \sin\beta/2 = \begin{pmatrix} \cos\beta/2 & 0 \\ 0 & \cos\beta/2 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 & -i\sin\beta/2 \\ i\sin\beta/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Subject, Year, Month, Date

$J_y = 1$ $\quad \frac{L+S}{2}$ $\quad J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$

$\underline{14}$

$$D^{j=1/2}_{m'_j\, m_j}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{array}{c|cc} m'_j & & \\ 1/2 & e^{-1/2(\alpha+\gamma)}\cos\beta/2 & e^{-1/2(\alpha-\gamma)}\sin\beta/2 \\ -1/2 & e^{-1/2(-\alpha+\gamma)}\sin\beta/2 & e^{+1/2(\alpha+\gamma)}\cos\beta/2 \end{array}$$

$$d^{J=1}_{m'_j\, m_j}(\beta) \qquad \underline{J=1}$$

$$J=1 \;,\; \hat{J}_y = \frac{1}{2i}(\hat{J}_+ - \hat{J}_-) = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} J_x \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$e^{-i\beta \hat{J}_y/\hbar} = \hat{1} - i\beta \hat{J}_y/\hbar + \frac{1}{2!}(-i\beta)^2\left(\frac{\hat{J}_y}{\hbar}\right)^2 + \frac{1}{3!}(-i\beta)^3\left(\frac{\hat{J}_y}{\hbar}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\hat{J}_y}{\hbar}\right)^4 (-i\beta)^4 + \dots$$

$$e^{-i/\hbar\, \beta \hat{J}_y} = \hat{1} - i\frac{\hat{J}_y}{\hbar}\sin\beta - \left(\frac{\hat{J}_y}{\hbar}\right)^2(1-\cos\beta)$$

$$\left(\frac{\hat{J}_y}{\hbar}\right)^3 = \left(\frac{\hat{J}_y}{\hbar}\right)$$

$$\left(\frac{\hat{J}_y}{\hbar}\right)^4 = \left(\frac{\hat{J}_y}{\hbar}\right)^2$$

$$d^{J=1}_{m'_j\, m_j}(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\beta}{2} & \frac{-\sin\beta}{\sqrt{2}} & \frac{1-\cos\beta}{2} \\ \sin\beta/\sqrt{2} & \cos\beta & -\sin\beta/\sqrt{2} \\ 1-\cos\beta/2 & \sin\beta/\sqrt{2} & 1+\cos\beta/2 \end{pmatrix}$$

$J_+ = \hbar\sqrt{2}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $\quad J_- = \hbar\sqrt{2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

N

ضرایب کلبش-گوردن :

$L = 1$

$S = 1/2$

$\hat{J}_z, \hat{J}^2$

بالاترین حالت — اسپین بالا

$|J = 3/2, m_j = 3/2\rangle = |1, +1\rangle |\chi_+\rangle$

$|J = 3/2, m_j = -3/2\rangle = |1, -1\rangle |\chi_-\rangle$

۳ حالت

$$\boxed{\hat{J}_- |J = 3/2, m_j = +3/2\rangle} = \hbar\sqrt{3}\, |J = 3/2, m_j = 1/2\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{1}\, |1, +1\rangle |\chi_-\rangle + \sqrt{2}\, |1, 0\rangle |\chi_+\rangle\right)$$

$\hbar\sqrt{3/2 - (-1/2)}$ $\quad \hbar\sqrt{2 - 0}$

تعامد

$$|J = 3/2, m_j = -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\, |1, 0\rangle |\chi_-\rangle + |1, -1\rangle |\chi_+\rangle\right)$$

$$|L - S| \leq J \leq |L + S|$$

$$1/2 \leq J \leq 3/2$$

J_+ یعنی بالا می‌برد ضریب J را با کمک ϕ ...

J های $3/2$ ، m_j ها

برای پیدا کردن J های $1/2$ باید از اصل تعامد استفاده کنیم

$$|J = 1/2, m_j = 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\, |1, 1\rangle |\chi_-\rangle - |1, 0\rangle |\chi_+\rangle\right)$$

چون هرمیتی است. J ها متفاوت، پس حالات عملگرهای سازگار باید بر هم عمود باشند

حال محاسبات را برای حالاتی انجام می‌دهیم که J ها از قبل مشخص ولی L نامعلوم است

$|L - S| \leq J \leq (L + S)$

محاسبه ویژه توابع هم‌زمان J_z ، J^2 ، L^2 برای ذرات با اسپین $s=1/2$ و اندازه حرکت زاویه‌ای مداری L

$$\hat{J}_z = \hat{L}_z + \hat{S}_z = \begin{pmatrix} L_z + \hat{S}_z & 0 \\ 0 & \hat{L}_z - S_z \end{pmatrix}$$

$\hbar/2$ برابر ماتریس آن بر اساس ماتریس‌های پائولی باید نوشته شود

کل عبارت $J_z = L_z + S_z$ را در ماتریس ضرب می‌کنیم به ازای آن یک بار S_z مثبت یک بار منفی باشد با این دیدگاه که $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ است

$(\hat{j}\cdot\hat{j}) \to j$

$$\hat{j}^2 = \hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2(\hat{L}_x \hat{S}_x + \hat{L}_y \hat{S}_y + L_z S_z)$$

$\hat{L}_+ = L_x + iL_y$

$L_- = L_x - iL_y$

$$\hat{j}^2 = \begin{pmatrix} L^2 + \frac{3}{4}\hbar^2 + \hbar\hat{L}_z & \hbar\hat{L}_- \\ \hbar\hat{L}_+ & L^2 + \frac{3}{4}\hbar^2 + \hbar\hat{L}_z \end{pmatrix}$$

ما دو بار اندازه‌ها را بر حسب L_+ و L_- می‌دهیم

$|j, m_j\rangle$

$$\psi_{j,m_j} = \underset{\text{مداری}}{\psi_+}\ \underset{\text{اسپینی}}{\chi_+} + \psi_- \chi_- = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$$

$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\hat{J}_z \psi_{j,m_j} = \begin{pmatrix} \hat{L}_z + S_z & 0 \\ 0 & \hat{L}_z - S_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} =$$

ψ ها را بر اساس ویژه حالات مشترک L^2 و L_z نوشته شده‌اند

$$\begin{pmatrix} -i\hbar \frac{d}{d\varphi} + \frac{1}{2}\hbar & 0 \\ 0 & -i\hbar \frac{d}{d\varphi} - \frac{1}{2}\hbar \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$$

$$= m_j \hbar \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{\partial \psi_+}{\partial \varphi} = (m_j - 1/2)\hbar \psi_+ \\ -i\hbar \dfrac{\partial \psi_-}{\partial \varphi} = (m_j + 1/2)\hbar \psi_- \end{cases}$$

ψ_{j,m_j} سمت r,θ,φ به طور کلی برای این شکل مشخصه باشد.

$$\boxed{\psi_{j,m_j}^{(r,\theta,\varphi)} = C_+ R(r) Y_{\ell, m_j - 1/2}\, \chi_+ + C_- R(r) Y_{\ell, m_j + 1/2}\, \chi_-}$$

$$\text{حال} \rightarrow J^2 \psi_{j,m_j} = j(j+1)\hbar^2 \psi_{j,m_j}$$

$$\begin{pmatrix} L^2 + \frac{3}{4}\hbar^2 + \hbar \hat{L}_z & \hbar \hat{L}_- \\ \hbar L_+ & L^2 + \frac{3}{4}\hbar^2 + \hbar \hat{L}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_+ R Y_{\ell, m_j - 1/2} \\ C_- R Y_{\ell, m_j + 1/2} \end{pmatrix}$$

$$= j(j+1)\hbar^2 \begin{pmatrix} C_+ R(r) Y_{\ell, m_j - 1/2} \\ C_- R(r) Y_{\ell, m_j + 1/2} \end{pmatrix} \qquad \hat{J}^2 \psi_{j,m_j} = j(j+1)\hbar^2 \psi_{j,m_j}$$

$$\begin{cases} C_+ \left[L(L+1) - j(j+1) + m_j + 1/4 \right] + C_- \sqrt{L(L+1) - (m_j^2 - 1/4)} = 0 \\ C_+ \sqrt{L(L+1) - (m_j^2 - 1/4)} + C_- \left[L(L+1) - j(j+1) - m_j + (1/4) \right] = 0 \end{cases}$$

$$C_+ = \sqrt{L + m_j + 1/2} \qquad C_- = \sqrt{L - m_j + 1/2}$$

Subject: ضرایب کلبش گوردن ذاتاً خودشان را نشان می‌دهند که به دنبال چه حالات مشترک J^2 و J_z هستیم
Year   Month   Date

$$\Rightarrow \psi_{L+1/2} = \sqrt{\frac{L+m_j+1/2}{2L+1}}\, R(r)\, Y_{L,m_j-1/2}\, \chi_+ + \sqrt{\frac{L-m_j+1/2}{2L+1}}\, R(r)\, Y_{L,m_j+1/2}\, \chi_-$$

$$J = L \pm 1/2$$

$$|L-1/2| \leq j \leq L+1/2$$

$L = 2$

$\nearrow \quad 3/2 \leq J \leq 5/2$

جفت l و s تمام دامنه‌ها مینیمم از ۳/۲ یعنی
کمی اضافه می‌کنیم که به ۵/۲ برسیم
در این حالت فقط ۳/۲ و ۵/۲ را داریم

ضرایب کلبش گوردن

$$\psi_j = -\sqrt{\frac{L-m_j+1/2}{2L+1}}\, R(r)\, Y_{\ell,m_j-1/2}\, \chi_+ + \sqrt{\frac{L+m_j+1/2}{2L+1}}\, R(r)\, Y_{\ell,m_j+1/2}\, \chi_-$$

$$\Rightarrow \psi_{j,m_j} = \sum_n \sum_{m_j} \underbrace{C^{j\,m_j}_{L\,m_s\,m_s}}_{\text{ضرایب کلبش گوردن}}\, \underbrace{\phi_{nLm_lm_s}}_{Y_L R(r)\, \chi_\pm}$$

نتیجه

$$C^{j=L+1/2\,,\,m_j}_{L,\,m_j-1/2\,,\,1/2,\,1/2} = C^{j=L-1/2\,,\,m_j}_{L,\,m_j+1/2\,,\,1/2,\,1/2} = \sqrt{\frac{L+m_j+1/2}{2L+1}}$$

$$C^{j=L+1/2\,,\,m_j}_{L,\,m_j+1/2\,,\,1/2,\,-1/2} = -C^{j=L-1/2\,,\,m_j}_{L,\,m_j-1/2\,,\,1/2,\,1/2} = \sqrt{\frac{L-m_j+1/2}{2L+1}}$$